Examenul naţional de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, raţia este $r=4$, iar $a_2=7$. Aflaţi a_{10}.

5p **2.** Fie numărul real *b*, astfel încât punctul $A(-2,5)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+bx+1$. Calculaţi $(f\circ f)(-1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+1)+\log_3(x+2)=\log_3\left(x^2+2\right)$.

5p **4.** Aflaţi numărul real *x*, ştiind că al treilea termen al dezvoltării $\left(2^{x-1}+3\right)^4$ este egal cu 54.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(4,5)$ şi $C(8,3)$. Determinaţi măsura unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Într-un triunghi *ABC* se cunosc $BC=14$ cm, $AC=13$ cm şi $AB=15$ cm. Calculaţi $\sin B$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Pentru fiecare număr real *x* se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că dacă $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $B\cdot A(6)=A(6)\cdot B$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X^2=A(6)$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pe $G=(-1,1)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ şi fie $f:G\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Demonstraţi că legea de compoziţie este asociativă.

5p **b)** Arătaţi că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in G$.

5p **c)** Demonstraţi că dacă $x,y\in G$ şi $x*y\in\mathbb{Z}$, atunci $y=-x$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Arătaţi că $f(x)-f'(x)=1-x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Stabiliţi intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.

5p **c)** Demonstraţi că $e^x\cdot(1-x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=1+\ln x$ şi $F(x)=x\cdot\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei *f*.

5p **b)** Determinaţi primitiva funcţiei *f*, a cărei reprezentare grafică trece prin punctul $A(e,e+1)$.

5p **c)** Calculaţi $\displaystyle\int\frac{1}{x\cdot e^{f(x)}}\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul orespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I		**(30 puncte)**
1.	$a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$ $a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 4 = 39$	**2p** **3p**
2.	$A(-2,\,5) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 4 - 2b + 1 = 5 \Leftrightarrow b = 4$. Obținem $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$. $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(0) = 1$.	**3p** **2p**
3.	$\log_3\left((2x+1)(x+2)\right) = \log_3\left(x^2+2\right) \Rightarrow (2x+1)(x+2) = x^2 + 2 \Rightarrow x \in \{0,\,-5\}$ Convine doar $x = 0$.	**3p** **2p**
4.	$T_3 = T_{2+1} = C_4^2 \cdot \left(2^{x-1}\right)^{4-2} \cdot 3^2 = 6 \cdot 2^{2x-2} \cdot 9 = 54 \cdot 2^{2x-2}$. $T_3 = 54 \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$	**3p** **2p**
5.	ΔABC este dreptunghic isoscel $\left(AB = BC = \sqrt{20},\ AC = \sqrt{40}\right)$ cu ipotenuza AC. $m\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right)\right) = 45^{\circ}$	**3p** **2p**
6.	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84\text{ cm}^2$. $S = \dfrac{BA \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow 84 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow \sin B = \dfrac{4}{5}$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL II		**(30 puncte)**
1.a)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^y \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \cdot 2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{x+y} \end{pmatrix} = A(x+y)$	**2p** **3p**
b)	Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. $B \cdot A(6) = A(6) \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 64y \\ z & 64t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 64z & 64t \end{pmatrix}$ Rezultă $y = z = 0$. Așadar $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde $a = x,\ b = t$.	**3p** **2p**
c)	$X^3 = X \cdot A(6) = A(6) \cdot X$. Rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 64 \end{cases}$. $X \in \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right\}$	**2p** **3p**

2.a)	$(x*y)*z=\frac{x+y}{1+xy}*z=\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}\cdot z}=\frac{xyz+x+y+z}{xy+yz+zx+1}$ (1)	**2p**
	$x*(y*z)=x*\frac{y+z}{1+yz}=\frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\cdot\frac{y+z}{1+yz}}=\frac{xyz+x+y+z}{xy+yz+zx+1}$. (2) Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea e asociativă.	**3p**
b)	$f(x*y)=\frac{1-x*y}{1+x*y}=\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}=\frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1}$.	**3p**
	$f(x)\cdot f(y)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}=\frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1}$, rezultând imediat concluzia.	**2p**
c)	„*” fiind lege de compoziție, rezultă că $x*y\in G=(-1,1)$.	**2p**
	Cum $x*y\in\mathbb{Z}$, deducem că $x*y=0$ și de aici $x+y=0$. Rezultă $y=-x$.	**3p**

SUBIECTUL III		**(30 puncte)**
1.a)	Pentru orice număr real *x*, funcția *f* este derivabilă și $f'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$	**3p**
	$f(x)-f'(x)=\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)=1-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ și se alcătuiește tabelul de variație.	**3p**
	f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și crescătoare pe $[0,+\infty)$.	**2p**
c)	Din tabelul de variație rezultă că $f(0)=1$ este minimul funcției *f* și de aici $e^x-x\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2p**
	În inegalitatea $e^x\geq 1+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ înlocuind *x* cu $-x$ rezultă $e^{-x}\geq 1-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Înmulțind cu e^x se obține $e^x(1-x)\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**3p**
2.a)	*F* este derivabilă și $F'(x)=(x\cdot\ln x)'=x\cdot(\ln x)'+x'\cdot\ln x=$	**3p**
	$=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x=1+\ln x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2p**
b)	Fie F_1 primitiva căutată. Diferența între două primitive ale aceleiași funcții fiind o constantă, rezultă că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x)=F(x)+c,\ \forall x\in(0,+\infty)$.	**2p**
	$F_1(e)=e+1\Leftrightarrow F(e)+c=e+1\Leftrightarrow e\cdot\ln e+c=e+1\Leftrightarrow c=1$. Așadar $F_1:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F_1(x)=x\cdot\ln x+1$.	**3p**
c)	$\int\frac{1}{x\cdot e^{f(x)}}dx=\int\frac{1}{x\cdot e^{1+\ln x}}dx=$	**2p**
	$=\int\frac{1}{x\cdot e\cdot x}dx=\frac{1}{e}\cdot\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e\cdot x}+\mathcal{C}$.	**3p**